Первый (очный) этап Всесибирской олимпиады по физике
14 ноября 2021 г.
11 класс
Решения и критерии оценки

11.1 В термосе объемом V = 1.5 л находится m = 1 кг льда при температуре 0˚С. Какое максимальное количество кипящей воды можно налить в этот термос? Потерями тепла пренебречь. Форма термоса не позволяет льду всплыть. Плотность льда $\rho_0 = 920$ кг/м^3, плотность воды $\rho_1 = 1000$ кг/м^3, удельная теплоемкость воды c = 4200 Дж/(кг·К), теплота плавления льда $\lambda = 3.36 \cdot 10^5$ Дж/кг.

Возможное решение

1) Наливать кипяток нужно медленно, чтобы он успевал остыть, а лед – растаять, освобождая место. Обозначим массу кипятка M, массу растаявшего льда m'. Предположим, что растает не весь лед: в таком случае конечная температура воды будет 0º С и она охладится на $\Delta T = 100^\circ$ С. Запишем уравнение теплового баланса <3 балла>

$$Mc\Delta T = m'\lambda.$$

В конце лед и вода заполняют весь объем термоса, то есть

$$\frac{M + m'}{\rho_1} + \frac{m - m'}{\rho_0} = V.$$ <3 балла>

Решая эти уравнения, получаем

$$M = \rho_1 \frac{\rho_0 V - m}{\rho_0 - (c\Delta T / \lambda)(\rho_1 - \rho_0)}.$$ <2 балла>

Подставляя числа, получаем ответ $M \approx 0.46$ кг, $M < m$, что соответствует принятому предположению.

Ответ: $M \approx 0.46$ кг <2 балла>

Разбалловка по этапам

	Этапы решения	Соотношения	Балл
1	Уравнение теплового баланса	$Mc\Delta T = m'\lambda.$	3
2	Условие заполнения объема	$\frac{M + m'}{\rho_1} + \frac{m - m'}{\rho_0} = V.$	3
3	Алгебраическое выражение для максимальной массы кипящей воды	$M = \rho_1 \frac{\rho_0 V - m}{\rho_0 - (c\Delta T / \lambda)(\rho_1 - \rho_0)}.$	2
4	Получение численного ответа и подтверждение гипотезы о неполном таянии льда	$M \approx 0.46$ кг	2

11.2 Два конденсатора соединили последовательно и, подключив полученную цепочку к источнику ЭДС, зарядили ее до напряжения *U*. Затем их, не разряжая, отсоединили друг от друга и соединили параллельно – на конденсаторах оказалось напряжение $\frac{3}{8}U$. Определите отношение емкости большего конденсатора к емкости меньшего.

Возможное решение

Предположим, что емкость меньшего конденсатора *C*, а большего - xC. При последовательном соединении емкость цепи $C_1 = \frac{xC}{x+1}$, и заряд каждого из конденсаторов $Q = C_1 U = \frac{xCU}{x+1}$ <3 балла>.

При параллельном соединении емкость цепи $C_2 = (1+x)C$, и она примет заряд $2Q$ <3 балла>.

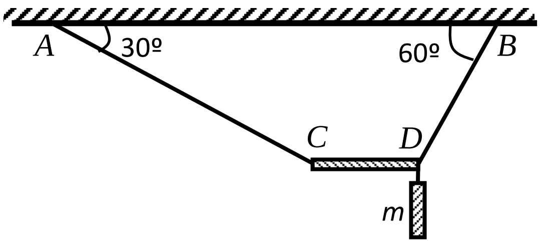
Напряжение на параллельно соединенных конденсаторах $\frac{3}{8}U = \frac{2Q}{C_2} = \frac{2xU}{(x+1)^2}$ <2 балла>.

Ответом является корень уравнения $x^2 - \frac{10}{3}x + 1 = 0$, который больше 1.

Ответ: x=3 <2 балла>

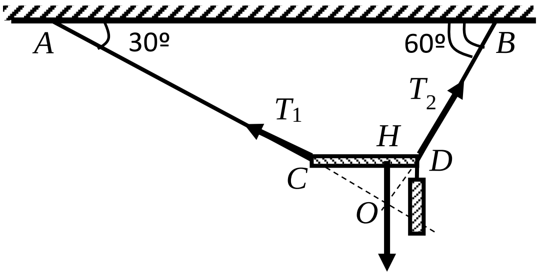
Разбалловка по этапам

	Этапы решения	Соотношения	Балл
1	Определение емкости и заряда последовательно соединенных конденсаторов	$C_1 = \frac{xC}{x+1}$, $Q = C_1 U = \frac{xCU}{x+1}$	3
2	Определение емкости и заряда параллельно соединенных конденсаторов	$C_2 = (1+x)C$, $Q_2 = 2Q$	3
3	Условие достижения данного напряжения при параллельном соединении	$\frac{3}{8}U = \frac{2Q}{C_2} = \frac{2xU}{(x+1)^2}$	2
4	Получение ответа	x=3	2



11.3 Однородная доска подвешена на легких канатах AC и BD. Точки A и B, а также точки C и D находятся на одной горизонтали. Угол CAB равен 30º, а угол ABD - 60º. К краю D доски подвешен груз массы m. Определите силу натяжения канатов AC и BD.

Возможное решение



1) Взяв в качестве начала системы отсчета точку O, образованную пересечением продолжений канатов AC и BD, мы увидим, что моменты сил натяжений этих канатов равны нулю. Поскольку система находится в равновесии, то момент суммарной силы тяжести, действующей на доску и груз, также равен нулю. Следовательно, центр масс этих двух тел находится на высоте OH треугольника COD. Если длина доски L, то $DH = L/4$ <2 балла>.

2) Поскольку центр масс доски находится на ее середине и расстояния от центра масс до тел обратно пропорционально их массам, то масса доски $M = m$ <2 балла>.

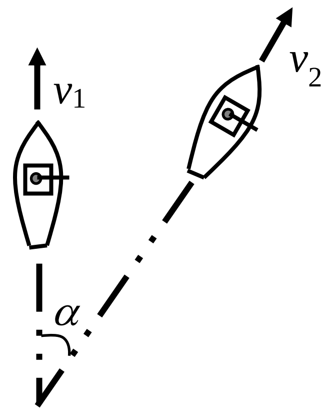
3) Обозначим силы натяжения каната AC T_1, а каната BD - T_2. Сумма моментов сил относительно точки D: $T_1 \cdot DO - 2mg \cdot DH = 0$, откуда $T_1 = mg$ <2 балла>.

4) Сумма моментов сил относительно точки C: $T_2 \cdot CO - 2mg \cdot CH = 0$, откуда $T_2 = \sqrt{3}mg$ <2 балла>.

Ответ: $T_1 = mg$, $T_2 = \sqrt{3}mg$ <2 балла>

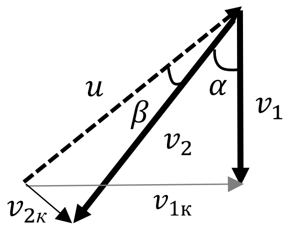
Разбалловка по этапам

	Этапы решения	Соотношения	Балл
1	Определение положения центра тяжести системы доски и груза	$DH = L/4$	2
2	Определение массы доски	$M = m$	2
3	Определение условия на момент силы натяжения левого каната	$T_1 \cdot DO - 2mg \cdot DH = 0$	2
4	Определение условие на момент силы натяжения правого каната	$T_2 \cdot CO - 2mg \cdot CH = 0$	2
5	Получение ответа	$T_1 = mg$, $T_2 = \sqrt{3}mg$	2



11.4. Первый катер идет со скоростью v_1, второй – со скоростью v_2 под углом α к курсу первого катера. На каждом из катеров флаг ветром поворачивается под угол 90° к его курсу. Определите скорость ветра.

Возможное решение



1) Флаг поворачивается в направлении скорости ветра относительно катера. Предположим, что скорость ветра в лабораторной системе отсчета $\vec{u}$ – в таком случае в системе отсчета первого катера она будет $\vec{v}_{1к} = \vec{u} - \vec{v}_1$, относительно второго катера скорость ветра будет $\vec{v}_{2к} = \vec{u} - \vec{v}_2$ <2 балла>.

2) Предположив, что угол между $\vec{u}$ и $\vec{v}_2$ равен β, получим:

$u = \frac{v_2}{cos(\beta)}$ и $u = \frac{v_1}{cos(\alpha+\beta)}$ <3 балла>.

Поделив первое уравнение на второе, получим уравнение

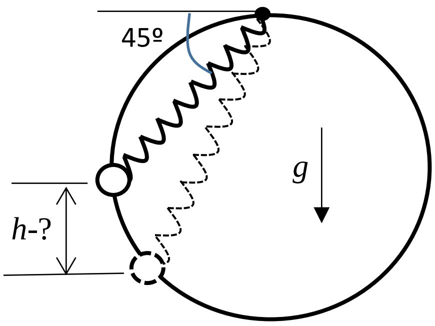
$1 = \frac{v_2\,cos(\alpha+\beta)}{v_1\,cos(\beta)} = \frac{v_2}{v_1}(cos(\alpha) - sin(\alpha)tg(\beta))$, из которого найдем $tg(\beta) = \frac{v_2\,cos(\alpha) - v_1}{v_2\,sin(\alpha)}$ <3 балла>.

Зная $tg(\beta)$, найдем ответ $u = v_2\sqrt{1 + tg^2(\beta)} = \frac{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2\,cos(\alpha)}}{sin(\alpha)}$.

Ответ: $u = \frac{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2\,cos(\alpha)}}{sin(\alpha)}$ <2 балла>.

Разбалловка по этапам

	Этапы решения	Соотношения	Балл
1	Связь направления флага с относительной скоростью ветра	$\vec{v}_{1к} = \vec{u} - \vec{v}_1$, $\vec{v}_{2к} = \vec{u} - \vec{v}_2$	2
2	Формулировка уравнений, связывающих скорости катеров и ветра с углом, под которым дует ветер и углом между курсами катеров	$u = \frac{v_2}{cos(\beta)}$, $u = \frac{v_1}{cos(\alpha+\beta)}$	3
3	Определение угла, под которым дует ветер	$tg(\beta) = \frac{v_2\,cos(\alpha) - v_1}{v_2\,sin(\alpha)}$	3
4	Получение ответа	$u = \frac{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2\,cos(\alpha)}}{sin(\alpha)}$	2



11.5. Бусинка массы m может без трения скользить по кольцу, лежащему в вертикальной плоскости. К ней прикреплена пружинка. Другой конец пружинки закреплен в верхней точке кольца. В начальном состоянии бусинка удерживается, как указано на рисунке (угол 45° к горизонту), при этом пружинка не деформирована. Жесткость пружинки k, ускорение свободного падения g, радиус кольца R. Найти, на какую максимальную высоту опустится бусинка после ее освобождения.

Возможное решение

Пусть бусинка опустится по вертикали на максимальное расстояние h. Тогда длина пружинки будет

$$l = \sqrt{(R+h)^2 + R^2 - h^2} = \sqrt{2R^2 + 2Rh}$$

Изменение длины

$$\Delta l = l - \sqrt{2}R = \sqrt{2R^2 + 2Rh} - \sqrt{2}R \quad \text{<2 балла>.}$$

Закон сохранения энергии $mgh = \frac{k(\Delta l)^2}{2}$ <2 балла>.

$$mgh = \frac{k\left(\sqrt{2R^2+2Rh} - \sqrt{2}R\right)^2}{2} = \frac{k\left(2R^2 + 2Rh - 2\sqrt{2}R\sqrt{2R^2+2Rh} + 2R^2\right)}{2}$$
$$= k\left(2R^2 + Rh - 2R\sqrt{R^2+Rh}\right)$$

$$mgh - k(2R^2 + Rh) = -2kR\sqrt{R^2+Rh}$$

Возведем в квадрат левую и правую часть

$$(mgh)^2 - 2mghk(2R^2 + Rh) + k^2(2R^2+Rh)^2 = 4k^2R^2(R^2+Rh),$$

Раскроем скобки, сокращаем на общий множитель h и получаем

$$(mg - kR)^2 h = 4mgkR^2,$$

$$h = \frac{4mgkR^2}{(mg-kR)^2} \quad \text{<2 балла>.}$$

Предельное значение h - не больше R.

Минимальную величину массы, при которой это значение достигается, проще найти непосредственно из закона сохранения энергии. Удлинение пружины $\Delta l = 2R - R\sqrt{2}$, $h = R$: $\frac{k\Delta l^2}{2} = kR^2\left(\sqrt{2}-1\right)^2 = mgR$, откуда $\frac{mg}{kR} = \left(\sqrt{2}-1\right)^2 = 3 - 2\sqrt{2}$ <2 балла>.

Ответ: $h = \frac{4mgkR^2}{\left(mg-kR\right)^2}$ при $\frac{mg}{kR} < 3 - 2\sqrt{2}$ и $h = R$ в остальных случаях <2 балла>.

Разбалловка по этапам

	Этапы решения	Соотношения	Балл
1	Получение выражения для изменения длины пружины	$\Delta l = l - \sqrt{2}R = \sqrt{2R^2 + 2Rh} - \sqrt{2}R$	2
2	Формулировка закона сохранения энергии	$mgh = \frac{k(\Delta l)^2}{2}$	2
3	Получение формулы для максимального опускания шарика	$h = \frac{4mgkR^2}{(mg - kR)^2}$	2
4	Формулировка условия, при котором шарик опустится до нижней точки кольца	$\frac{mg}{kR} = \left(\sqrt{2} - 1\right)^2 = 3 - 2\sqrt{2}$	2
5	Получение ответа	$h = \frac{4mgkR^2}{\left(mg - kR\right)^2}$ при $\frac{mg}{kR} < 3 - 2\sqrt{2}$ и $h = R$ в остальных случаях	2